



L'OPERATORE NABLA spiegato da un vil meccanico

1 PREMESSA

Ad uso dei giovani studenti che si accingono ad attrezzare il loro bagaglio culturale per divenire dei professionisti nel campo tecnico-scientifico, scriviamo queste note, di carattere pratico (a guisa di “Bignamino”), sperando che essi le trovino di qualche utilità.

Le variabili indipendenti, che più indipendenti non si può, sono il tempo e lo spazio: fiumi d'inchiostro si sprecano per pontificare su questi due enti, specialmente quando si parla di Relatività (che è un argomento caro a tutti e strapazzato da molti).

Spesso ai giovani sfugge che il tempo è soggetto ad una freccia direzionale (la *freccia del tempo* di prigoginiana memoria) che, almeno nelle comuni applicazioni¹, lo rende *monodimensionale e monoverso*, mentre lo spazio può essere percorso *in più direzioni e*, su ciascuna direzione, *in entrambe i versi*².

Inoltre le direzioni (che penseremo per semplicità in un riferimento cartesiano sempre ortogonali tra loro) possono essere in numero qualsivoglia (vedi iperspazio), anche se la nostra capacità sensoriale si ferma a tre.

Queste osservazioni ci fanno capire che quando si effettuano operazioni di derivazione di funzioni dipendenti da tempo e spazio si devono usare vocaboli dedicati (che, alle volte, vengono confusi): rispetto al tempo la derivata prima si chiama *velocità* e la derivata seconda *accelerazione* (è la velocità della velocità), rispetto allo spazio la derivata prima si chiama *gradiente* (che, se applicata ad uno scalare, produce un vettore) oppure *divergenza* (che, se applicata ad un vettore, produce uno scalare), la derivata seconda *laplaciano*³.

A titolo di esempio, sia data la classica equazione del moto armonico

$$x = X \cos(\omega t + \varphi),$$

dove X rappresenta l'elongazione massima.

Derivando una prima volta otteniamo

$$\dot{x} = X \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi),$$

¹ Vedremo in seguito che, applicando elementari considerazioni sulle proprietà dell'unità immaginaria e sotto certe ipotesi, il tempo potrebbe richiedere dimensioni superiori per essere rappresentato.

² Tanto per fissare le idee si pensi ad un riferimento cartesiano ortogonale in un universo euclideo.

³ La reiterazione di una medesima operazione sul risultato della prima è frequente nella tecnica: si pensi, ad esempio al momento d'inerzia che, in meccanica, è definibile come il momento statico di un momento statico. Per questo l'operatore di Laplace, o laplaciano, si definisce del secondo ordine.



che rappresenta la velocità, mentre, derivando una seconda volta, otteniamo

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x,$$

che rappresenta l'accelerazione.

Le operazioni di derivazione rispetto al tempo funzionano semplicemente così: capitolo chiuso.

E su di un comune foglio di carta, sia pure la carta del formaggio (considerato praticamente bidimensionale, il foglio), possiamo bel bello (come direbbe sciur Lisander) rappresentare esaustivamente, in tre grafici sinusoidali, opportunamente sfasati, spazio, velocità e accelerazione, in funzione del tempo, *profittando del fatto che il tempo è monodimensionale e monoverso*.

Ben altra attrezzatura e rappresentazione è necessario adottare quando la variabile indipendente è polidimensionale ed ambiversa come lo spazio. Tanto per rimanere... nel sensibile (o nel rappresentabile, se si preferisce) consideriamo una funzione z di due variabili (per esempio spaziali, certamente non temporali!) indipendenti x e y (se avessimo voluto rappresentare una funzione v di tre variabili indipendenti x , y , z , ovvero $v(x,y,z)$, saremmo, ovviamente, caduti... nell'irrepresentabile e nell'insensibile quadrimensionale...)⁴: tale funzione $z(x,y)$ possiamo rappresentarla come in *Figura 1*.

⁴ Ribadiamo quanto più volte osservato, specialmente in "Introduzione all'Iperspazio": le nostre limitazioni sensoriali ci impediscono di rappresentare ed immaginare spazi di ordine >3 , mentre possiamo operare matematicamente in uno spazio di qualunque ordine, in particolare di ordine >3 .

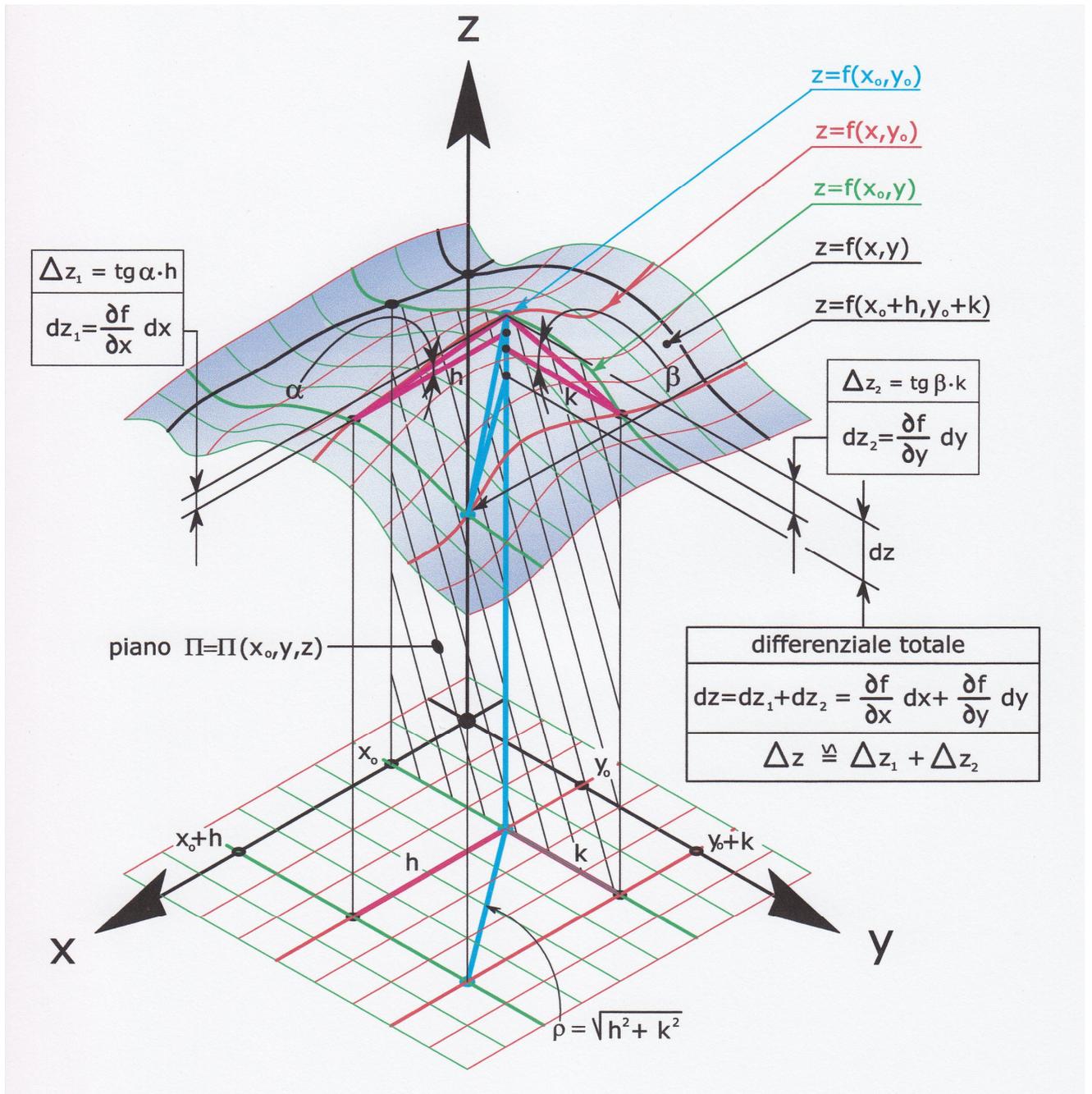


Figura 1 – La funzione $z=f(x,y)$, che supponiamo derivabile nel punto (x_0, y_0) , va trattata, come insegna l'Analisi Matematica, tirando in campo le derivate parziali sia per calcolarne il differenziale totale sia per calcolarne la derivata secondo una direzione ed un verso

2 IL FLUSSO DI UN VETTORE

Consideriamo una porzione di spazio (*campo*) nel quale sia definibile un vettore caratteristico (*campo vettoriale*), per esempio il vettore velocità in seno ad una corrente fluida come in *Figura 2* (o il vettore intensità del campo per un campo elettrico etc.).

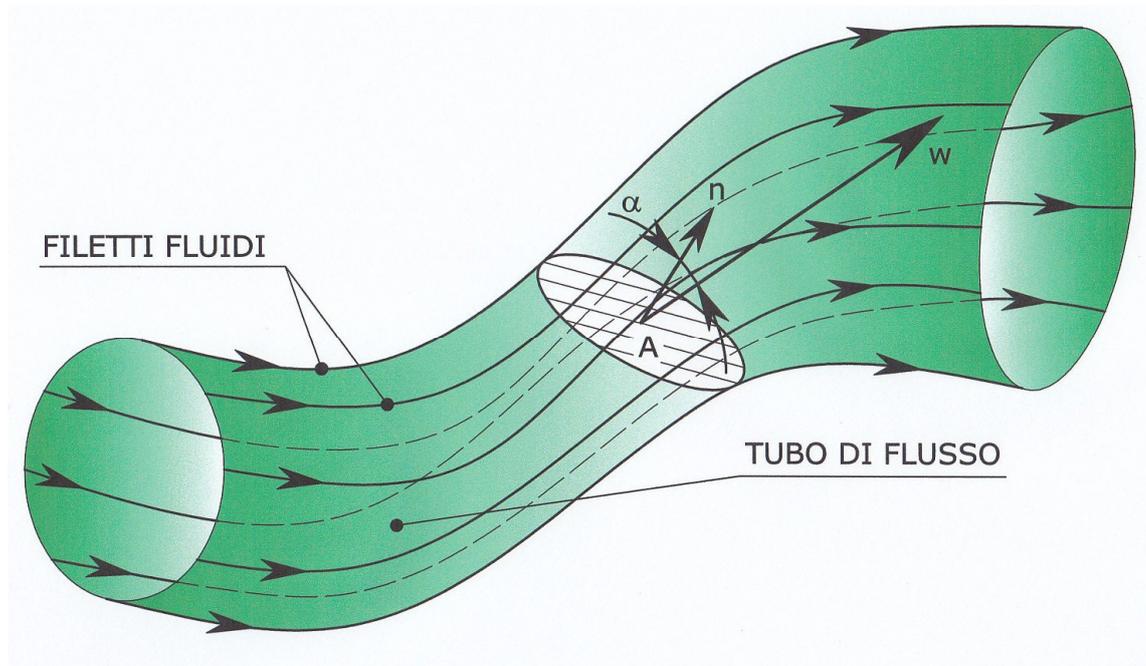


Figura 2 – Per la definizione del flusso di un vettore

Si definisce *flusso del vettore* (e si indica con Φ) il prodotto scalare (*coseno*) tra il vettore unitario ortogonale (*versore*), associabile alla superficie del campo, ed il vettore del campo in corrispondenza a tale superficie.

Poiché il vettore del campo può variare punto per punto all'interno di una superficie finita, sarà corretto scrivere tale prodotto scalare in termini puntuali (o infinitesimi):

$$d\Phi_w = \vec{w} \times \vec{n} dA = w \cdot dA \cdot \cos \alpha . \quad (1)$$

Nel caso di un fluido si osserva immediatamente che il *flusso della velocità* rappresenta la *portata volumica* del fluido stesso, grandezza con cui i meccanici hanno spesso a che fare, e che ha le caratteristiche di uno scalare. Infatti, applicando il Sistema Internazionale di u.m. a questo caso, vediamo subito che l'unità di misura del flusso della velocità risulta

$$\Phi_w = \left[\frac{m^3}{sec} \right] .$$

La forma integrale della (1) sarà

$$\Phi_A(\vec{w}) = \int_A \vec{w} \times \vec{n} dA ,$$

che, se applicata al vettore campo elettrico \vec{E} , porta dritta dritta al Teorema di Gauss.

3 LA DIVERGENZA DI UN VETTORE

La divergenza di un vettore è definita come *il flusso del vettore per unità di volume*. Da buoni meccanici applichiamo questa definizione ad un generico vettore \vec{V} e sia A l'area della superficie che racchiude il volume, quindi, applicando quanto sopra detto, guardiamone l'unità di misura nel *SI*:

$$\Phi \vec{V} = \vec{V} \times \vec{n} A = VA \cos \alpha = [umV \cdot m^2] ,$$

dove con *umV* abbiamo indicato l'unità di misura di \vec{V} .

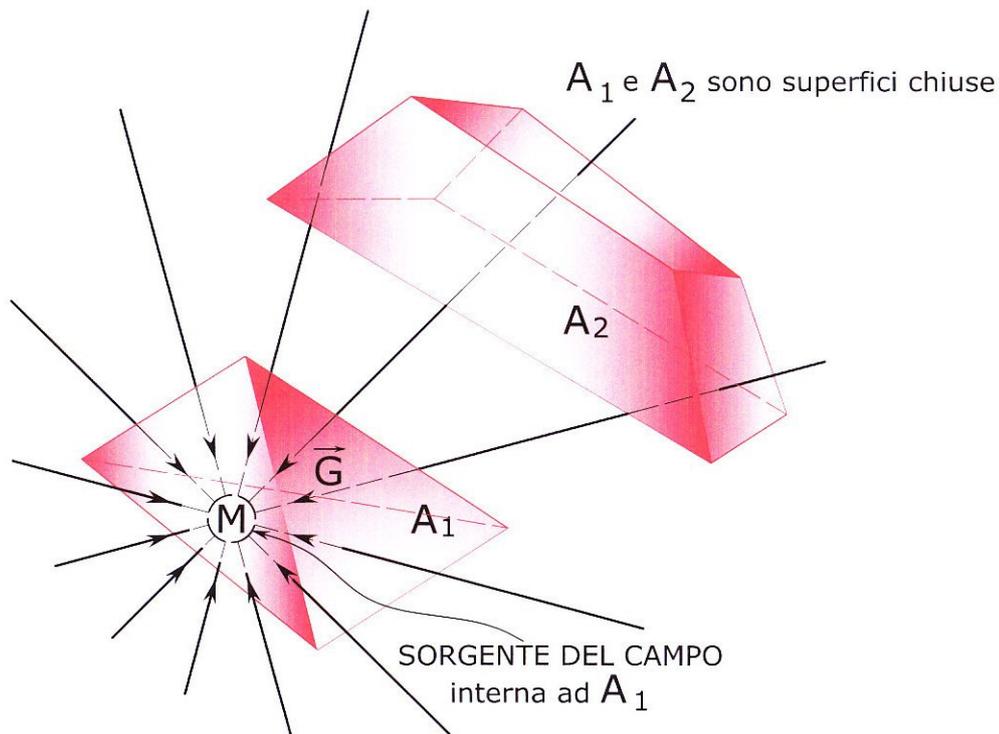


Figura3 – Sia M la sorgente del campo (p.es. una massa) la cui presenza alteri le proprietà dello spazio causando la nascita di un campo vettoriale G (per esempio la forza peso), la divergenza sulla superficie chiusa A₂ è nulla perché le linee entrano ed escono, mentre la divergenza sulla superficie chiusa A₁ è diversa da zero ed è indice del fatto che contiene almeno una parte della sorgente del campo stesso



Se ora applichiamo la definizione data, indicando con v il volume racchiuso dalla superficie di area A , in termini puntuali possiamo scrivere:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{d\Phi\vec{V}}{dv} = \left[\frac{um\vec{V} \cdot m^2}{m^3} \right] = \left[\frac{um\vec{V}}{m} \right],$$

che, dal punto di vista dimensionale, rappresenta la derivata spaziale di \vec{V} ; e poiché questo lo pensiamo in uno spazio tridimensionale, euclideo, in un riferimento cartesiano ortogonale, con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} i tre versori che soddisfano la relazione

$$\vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z,$$

possiamo scrivere la seguente derivata spaziale, giusto quanto osservato nell'introduzione:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Finalmente, al fine di dare compattezza alla notazione, facciamo comparire il nostro operatore ∇ (*nabla*) che, applicato come operatore scalare al vettore in questione

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z},$$

consente di utilizzare un formalismo assai sintetico per esprimere la divergenza di \vec{V} .

Il carattere vettoriale o scalare dell'operatore laplaciano, non dipende dall'argomento ma è proprio dell'operatore stesso. Quindi produce uno scalare, come sopra, se è applicato scalarmente alla funzione argomento ed un vettore se è applicato vettorialmente.